

NATIONALEKONOMISKA INSTITUTIONEN

UPPSALA 2007-01-26

Uppsala universitet

Examensarbete D

Författare: Göran Österholm (g@herrg.se)

Handledare: Martin Holmén

HT 2006

**EMPIRISK STUDIE AV BLACK-SCHOLES
PRISSÄTTNINGSMODELL
OMXS30-OPTIONERS PRISRÖRELSER OCH DELTA HEDGING**

SAMMANFATTNING

I uppsatsen studeras diskrepansen mellan Black-Scholes prissättningsmodell och prissättningen på marknaden för OMXS30-optioner – i ett *delta hedging*-perspektiv.

Resultaten i uppsatsen antyder att Black-Scholes modell ger för höga Δ -värden för OMXS30 köpoptioner och likaså ger modellen för höga Δ -värden för OMXS30 säljoptioner gentemot verkligheten, under testperioden.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

SAMMANFATTNING.....	3
Innehållsförteckning.....	4
1 INLEDNING.....	5
1.1 Bakgrund.....	5
1.2 Definition av problem och mål.....	6
1.3 Avgränsning.....	6
1.4 Disposition.....	6
2 TEORI.....	7
2.1 Europeiska köpoptioner.....	7
2.2 Black-Scholes formel.....	9
2.3 Delta Hedging och deltavärde.....	12
2.4 Hedging Error.....	16
3 METOD.....	19
3.1 Data.....	19
3.2 Beräkningsmetoder.....	19
3.3 Kategorisering av observerade optioner.....	23
4 RESULTAT.....	24
4.1 Presentation av resultat.....	24
4.1.1 Köpoptioner.....	24
4.1.2 Säljoptioner.....	28
4.2 Kritik.....	32
4.3 Slutsatser.....	33
4.4 Framtida forskning.....	33
Referenser.....	34
Appendix I.....	35
Appendix II.....	41

1 INLEDNING

Denna uppsats är en studie av diskrepansen mellan Black-Scholes modell och marknadens prISRörelser på OMXS30-optioner och OMXS30-index - i ett *delta hedging*-perspektiv. Till grund för studien ligger kursdata från OMX AB Stockholmsbörsen, gällande för perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22. Avsikten med studien är att belysa skillnaden mellan förväntat *hedging error* enligt Black-Scholes modell och verkligt *hedging error* bortsett från prISRörändringar på optionerna på grund av att tiden löper. Studiens datamaterial motsvarar omviktning av *hedge*-portföljen en gång per handelsdag.

1.1 Bakgrund

Trots den långa raden av empiriska studier som visar på förekommande brister hos Black-Scholes prISSättningsmodell, visar sig Black-Scholes modell vara förvånansvärt robust och frekvent använd (Cerny 2004).

Detta förhållandevis lättanvända verktyg används dagligen på derivatmarknader runt om i världen, trots att Macbeth och Merville redan 1979 påvisade att Black-Scholes modell underprissatte vissa köpoptioner (med höga delta-värden) medan modellen överprissatte andra (köpoptioner med låga delta-värden). Och trots att Rubinstein (1994) visade i sin studie att optionsmarknaden ändrat skepnad efter börskraschen i oktober 1987, där den så kallade implicita täthetsfunktionen uppvisar en betydande skevhet mot före kraschen.

Detta till trots riktar jag i den här uppsatsen intresset mot just diskrepansen mellan Black-Scholes prISSättningsmodell och verkliga marknadens prISSättning av optioner. Och orsaken är att jag här vill belysa diskrepansen mellan modellen och verkligheten ur ett *delta hedging*-perspektiv, där effekterna av förändringen i marknadens syn på volatiliteten och förändringen i marknadsräntorna analyseras. Med mer kunskaper om diskrepansen beskriven ovan kan bättre modeller och beräkningsmetoder också skapas för finansmarknadens aktörer.

1.2 Definition av problem och mål

Frågan som ställs i den här uppsatsen är: Hur stor är skillnaden mellan förväntat *hedging error*, enligt Black-Scholes modell, och det verkliga *hedging error* som uppstår vid *delta hedging*, om man bara ser till förändringen i volatiliteten och förändringen i marknadsräntorna?

1.3 Avgränsning

I uppsatsen studeras diskrepansen mellan Black-Scholes modell och marknaden för OMXS30 index optioner, som är av typen europeiska optioner (se kap. 2.1). Som grund för studien ligger kursdata gällande för klockan 12:00 varje handelsdag under perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22.

Uppsatsens intresse riktas mot den del av diskrepansen som uppkommer på grund av att marknads syn på volatiliteten förändras samt förändringen i priserna på räntemarknaden. Som riskfri ränta har räntenoteringar för en månaders statsskuldväxel använts, gällande simultant med övriga kursdata.

Effekter på *hedging errors* som är förknippade med att tiden löper mot lösendagen, är i studien bortskalad enligt beskrivningen i kapitel 3.2.¹

1.4 Disposition

I uppsatsens del 2 beskrivs den teoretiska bakgrunden, däribland hur en *delta hedge* skapas, hur deltavärde beräknas och hur *hedging error* definieras.

Beskrivning av vilka data som ligger till grund för studien återfinns i första kapitlet av del 3. I del 3 ges också en beskrivning av beräkningsmetoder och hypotestest i studien, samt hur olika optioner har kategoriserats i studien.

¹ Se Björk (1998), kap. 8.

Slutligen i del 4 presenteras resultaten, kritik, och slutsatserna av studien.

Då teori och beräkningar i studien gällande för säljoptioner är mycket snarlik de gällande för köpoptioner, har i uppsatsens del 2 och del 3 i stort bara köpoptioner behandlats, med något enstaka undantag.

2 TEORI

2.1 Europeiska köpoptioner²

Derivat (*derivative asset*) eller **villkorad fordran** (*contingent claim*) är samlingsnamn för en hel klass med tillgångar på finansmarknaden, vars värde uttryckligen är beroende av en eller flera **underliggande tillgångar** (*underlying assets*).

Derivatet är i praktiken ett kontrakt mellan två parter, **utfärdaren** och **innehavaren**.

Parternas respektive skyldigheter och rättigheter är reglerat i derivatet och kan se olika ut för olika typer av derivat.

Köp- och säljoption är derivat, där innehavaren har rätten, men inte skyldighet, att antingen köpa eller sälja den underliggande tillgången till ett förutbestämt pris, **lösenpris** (*exercise price* eller *strike price*). En option som ger innehavaren rätten att köpa den underliggande tillgången, kallas **köpoption** (*call option*), och en option som ger innehavaren rätten att sälja den underliggande tillgången, kallas **säljoption** (*put option*).

Löptiden för köp- och säljoptioner är reglerad i optionen med en förfallodag, **lösendag** (*time of maturity* eller *exercise date*).

Utfärdaren av en köpoption är, till skillnad från innehavaren, skyldig att sälja den underliggande tillgången för det avtalade lösenpriset till innehavaren av köpoptionen, om innehavaren väljer att utnyttja sin rätt.

Motsvarande är utfärdaren av en säljoption skyldig att köpa den underliggande tillgången från innehavaren av säljoptionen för det överenskomna lösenpriset.

² Kapitel 2.1 är i stort hämtat från Sundstedt och Österholm (2006).

Som en direkt följd av köp- respektive säljoptionens utformning kan deras värde, vid tillfället då de inlöses, beskrivas som en funktion beroende av värdet på den underliggande tillgången och lösenpriset.

För innehavaren av en köpoption kan förhållandet vid inlösningstillfället beskrivas matematiskt med

$$C = \max(S - K, 0), \quad (2.1.1)$$

där C avser värdet på köpoptionen, S värdet på den underliggande tillgången vid inlösningstillfället och K är lösenpriset.

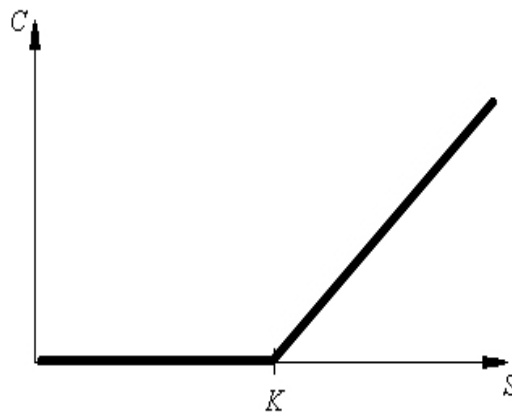


Fig. 2.1.1 : Värde på en köpoption i förhållande till underliggande tillgångens värde vid lösendagen, gällande för innehavaren.

För utfärdaren blir köpoptionens värde istället negativt,

$$- C = - \max(S - K, 0). \quad (2.1.2)$$

Det förekommer i huvudsak två typer av köp- och säljoptioner, amerikanska och europeiska. En **amerikansk option** kan innehavaren välja att lösa in (kräva sin avtalade rätt för) när som helst fram till och med lösendagen. För en **europeisk option** gäller att den bara kan lösas in på lösendagen.

I och med att vi i förväg vet när den europeiska köpoptionen kommer lösas in, vet vi också att värdet på köpoptionen, just på lösendagen, kommer ha värdet enligt (2.1.1) och (2.1.2). För

amerikanska optioner vet vi inte i förväg den exakta tidpunkten när förhållandena (2.1.1) och (2.1.2) kommer gälla.

Optioner som handlas på finansmarknaderna kan naturligtvis köpas och säljas under tiden fram till lösendagen oberoende om de är av typen amerikanska eller europeiska men de europeiska kan inte lösas in annat än på lösendagen.

Optioner med OMXS30-index som underliggande tillgång är av typen europeiska.

2.2 Black-Scholes formel³

Om vi, enligt föregående kapitel, känner värdet på en europeisk köpoption i förhållande till den underliggande tillgångens värde S_T , vid ett specifikt tillfälle i framtiden, samt känner fördelningen för S_T , då kan vi räkna ut väntevärdet för optionen C_t , vid tiden t där $t < T$. I vårt fall med köpoptioner är T lösendagen.

Black-Scholes prissättningsmodell bygger, bland annat, på antagandet att den underliggande aktiens värde utvecklar sig i enlighet med en stokastisk process som kallas *geometric Brownian motion* (GBM), där förändringen av S_t , vid tiden t , kan uttryckas:

$$dS_t = aS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.2.1)$$

där a är konstant och kan betraktas som den årliga avkastningen. Konstanten σ symboliserar avvikelens storlek och kallas volatilitet. Gränsvärdet dt , är förändringen i tiden, eller om man så vill, storleken på hoppet i tiden, framåt. Stokastiska variabeln dW styr den slumpmässiga värdeförändringen, uppåt/nedåt, för den underliggande aktien S , där då $\sigma S_t dW_t$ utgör hela amplituden på förändringen, uppåt/nedåt.

I de här sammanhangen kallas vanligen (2.2.1) för aktiens **prisprocess**.

³ Finns beskrivet i flera kursböcker men i varierande svårighetsgrad. Björk (1998) kap. 6 är ett exempel. Kanske en aning mer pedagogiskt beskrivet i Cerny (2004). Prissättningsmodellen publicerades först i Black och Scholes (1973).

Om värdet på aktien vid tiden t är lika med S_t och aktiens prisprocess motsvarar (2.2.1) kan vi beskriva ett framtida värde på aktien, exempelvis vid tiden T , som en stokastisk variabel:

$$S_T = S_t \cdot \exp\left\{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma (W(T) - W(t))\right\}, \quad (2.2.2)$$

där $W(T) - W(t)$ är normalfördelat med väntevärdet noll och standardavvikelsen $\sqrt{T - t}$,

$$W(T) - W(t) \in N[0, \sqrt{T - t}].$$

Under dessa förutsättningar är stokastiska variabeln S_T i (2.2.2) logaritmiskt normalfördelat, sådan att

$$\ln S_T \in N\left[\ln S_t + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma \sqrt{T - t}\right]. \quad (2.2.3)$$

Antar vi nu att det inte förekommer några arbitragemöjligheter och inga transaktionskostnader på marknaden, kan vi med Black-Scholes formel nedan, (2.2.4), beräkna ett riskneutralt väntevärde på en europeisk köpoption med S som underliggande aktie.

$$C_t = S_t N[d_1(S_t, K, r, \sigma, T - t)] - e^{-t(T-t)} KN[d_2(S_t, K, r, \sigma, T - t)], \quad (2.2.4)$$

där K är köpoptionens lösenpris, r är riskfri ränta,

$$d_1(S_t, K, r, \sigma, T - t) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad (2.2.5)$$

$$d_2(S_t, K, r, \sigma, T - t) = d_1(S_t, K, r, \sigma, T - t) - \sigma \sqrt{T - t},$$

och med kumulativ standard normalsannolikhet,

$$N[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (2.2.6)$$

För en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde noll och standardavvikelse ett, gäller att sannolikheten att utfallet ska bli mindre än x är lika med $N[x]$ i (2.2.6).

Ritar vi upp värdet på C_t vid tiden t i funktion av värdet på aktien, S_t , vid tiden t med hjälp av Black-Scholes formel, då $T > t$ (före lösentillfället alltså), kan **prisfunktionen** exempelvis se ut som i grafen nedan.

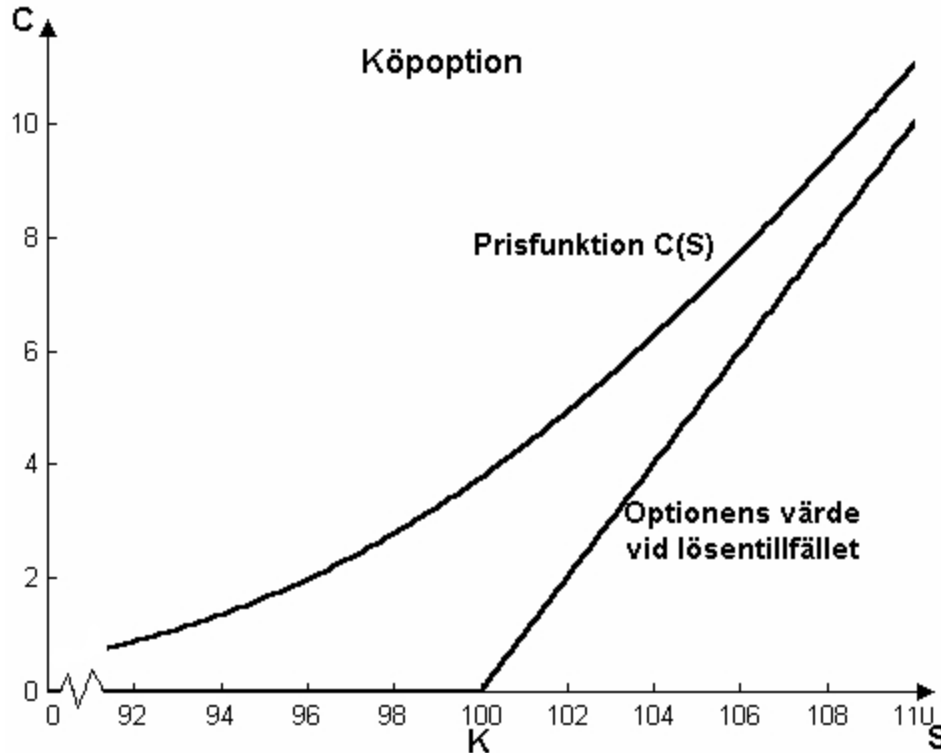


Fig. 2.2.1 : Prisfunktion enligt Black-Scholes formel, där $K = 100$, riskfri ränta $r = 2\%$, volatiliteten $\sigma = 20\%$ och tid kvar till lösendagen $T - t = 73$ dagar.

2.3 Delta Hedging och deltavärde⁴

Låt oss säga att vi är innehavare eller utställare av en europeisk köption och vill skydda oss mot prisförändringar på optionen som enbart beror av att värdet på den underliggande aktien förändras. Då kan vi använda oss av en teknik som kallas *delta hedging*.

Delta hedging bygger på principen att komplettera optionen, antingen genom att köpa eller säljer en andel av den underliggande aktien, så att när optionen sjunker i värde stiger andelen av aktien lika mycket, och vice versa.

Prisförändringar på optionen som beror på att räntan r , eller att volatiliteten σ , förändras skyddar vi oss inte mot enbart med *delta hedging*. Likaså skyddar vi oss inte mot prisförändringar på optionen som beror på att tiden går. För att hedga sitt optionsinnehav mot förändringar i dessa tre variabler måste vi göra ytterligare tillägg i portföljen.

Andelen, av aktien som vi antingen ska köpa eller sälja till optionen för att åstadkomma en portfölj som inte varierar i värde när aktiepriset går upp och ner, kallas **deltavärde**.

Deltavärdet är i själva verket partiella derivatan av optionens prisfunktion med avseende på aktiepriset (se **fig. 2.3.2** sid. 15).

$$\Delta = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} \quad (2.3.1)$$

Om priset på en europeisk köption kan beskrivas enligt grafen i **fig. 2.3.1.**, nedan, och priset på aktien för tillfället är S_0 , som i **fig. 2.3.1**, så gäller att för små förändringar i priset på aktien (allt annat lika), så kommer prisförändringen på optionen approximativt förändras med värdet motsvarande partiella derivatan av prisfunktionen vid S_0 .

⁴ Se exempelvis Björk (1998), eller annan kurslitteratur.

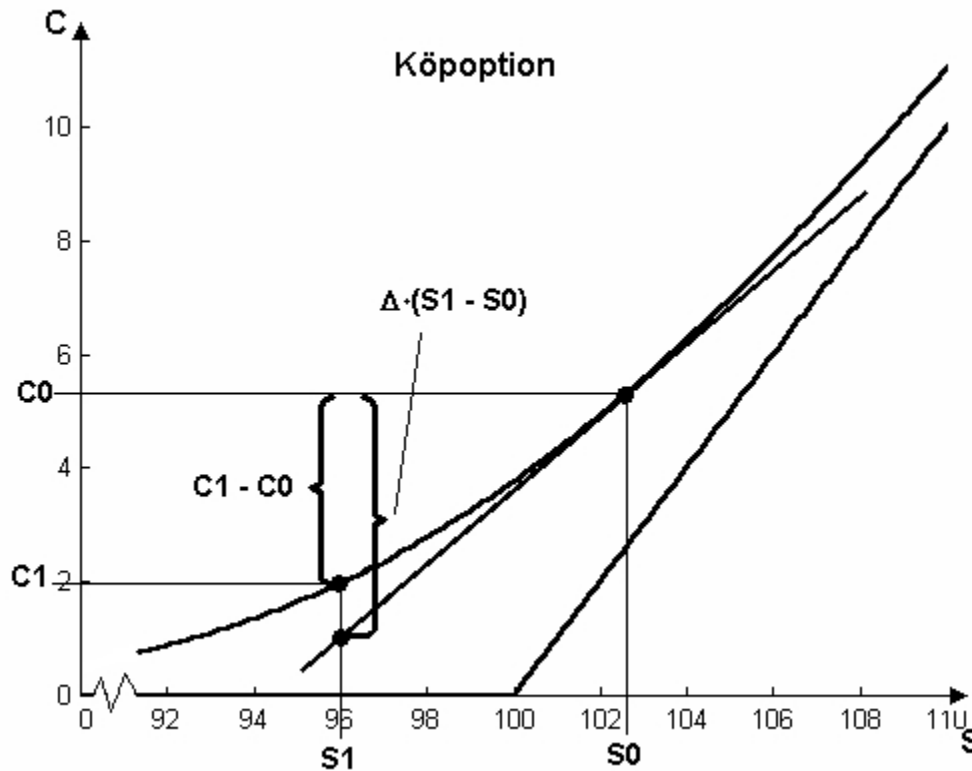


Fig. 2.3.1 : Approximation av förändringen i priset på en köption med hjälp av delta andelar av underliggande aktie.

Exempel 2.3.1: En köptions värde är C_0 och den underliggande aktiens värde är S_0 och derivatan av optionens prisfunktion med avseende på aktiepriset är Δ i punkten S_0 . Om priset på aktien sjunker till S_1 , då sjunker enligt Black-Scholes formel priset på optionen till C_1 . Äger vi nu andelen Δ av aktie kommer andelen från början vara värd ΔS_0 . Efter att aktien sjunkit är andelen värd ΔS_1 istället. Förändringen i värdet av andelen blir då, $\Delta(S_1 - S_0)$, d.v.s. nära nog lika med $C_1 - C_0$.

Den här, approximativt lika, förändringen i värdet på optionen och andelen av underliggande aktien utnyttjar vi i *delta hedging* för att försöka åstadkomma en portfölj som inte varierar i värde när aktiens värde varierar. Äger vi optionen, värd C_0 , så säljer vi helt enkelt Δ andelar av den underliggande aktien. Vi lägger alltså till $-\Delta S_0$ i portföljen. Värdet på vår portfölj blir då

$$V_0 = C_0 - \Delta S_0. \quad (2.3.2)$$

När aktien nu går ner till S_1 ökar värdet på vår andel från $-\Delta S_0$ till $-\Delta S_1$, samtidigt som vår options värde sjunker till C_1 . Portföljens nya värde är då

$$V_1 = C_1 - \Delta S_1 \quad (2.3.3)$$

Förändringen i värdet på portföljen, från det att vi köpte den till efter det att aktien stigit, blir

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 &= C_1 - \Delta S_1 - (C_0 - \Delta S_0) \\ &= C_1 - C_0 - \Delta(S_1 - S_0) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

För små förändringar i S gäller då att (2.3.4) är ungefär lika med

$$\begin{aligned} &\partial C_0 - \Delta \partial S_0 \\ &= \partial C_0 - \frac{\partial C_0}{\partial S_0} \partial S_0 \\ &= \partial C_0 - \partial C_0 = 0 \end{aligned}$$

D.v.s. gränsvärdet för värdeförändringen på portföljen är noll vid förändringar i priset på aktien och approximativt lika med noll för små förändringar.

Skulle vi istället vara utfärdare av den europeiska köptionen och vilja göra en *hedge* mot prisförändringar på underliggande aktien är det bara att kasta om tecknen i högerledet på (2.3.2).

Vi har då sålt en europeisk köption och köpt Δ andelar av aktien:

$$V_0 = -C_0 + \Delta S_0 \quad (2.3.5)$$

Det enda vi behöver räkna ut för att kunna genomföra en *delta hedge* är alltså Δ -värdet (2.3.1).

Om vi godtar Black-Scholes modell som en rimlig beskrivning av verkligheten på aktie- och optionsmarknaden, då kan vi uttryckligen beräkna Δ -värdet genom att derivera Black-Scholes formel, (2.2.4), med avseende på S , vilket ger:

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N[d_1], \quad (2.3.6)$$

där $N[x]$ och d_1 är som i (2.2.5) och (2.2.6). Deltavärdena för köpoptioner går mellan ett och noll, medan deltavärdena för säljoptioner går mellan noll och minus ett. I **fig. 2.3.2** är deltavärden för köp- respektive säljoptioner utritade i funktion av lösenpriset K samt tiden kvar till lösen.

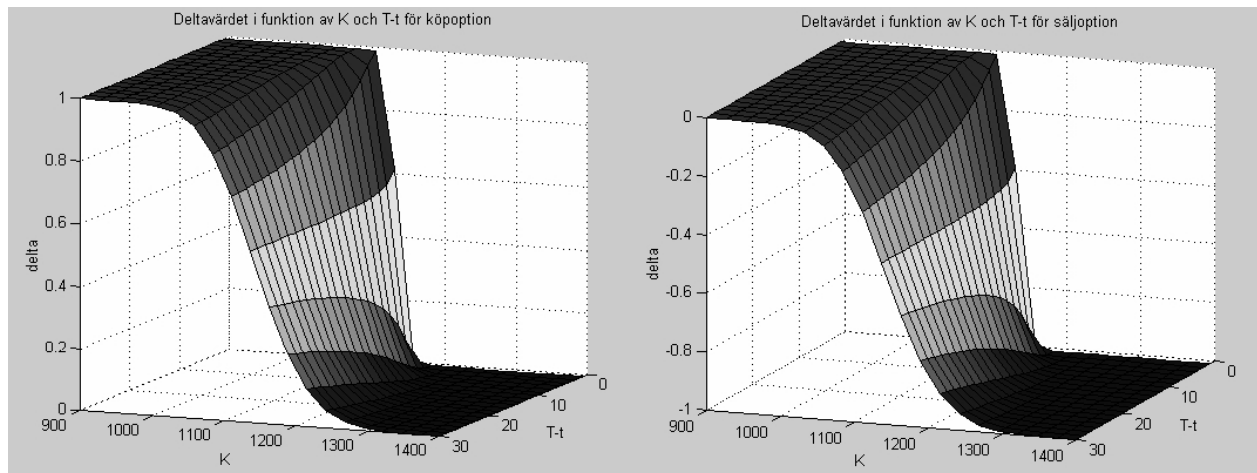


Fig. 2.3.2: Deltavärde i funktion av lösenpriset K och tiden kvar till lösendagen (dagar) för köp- respektive säljoption med riskfri ränta $r = 3\%$, volatiliteten $\sigma = 18\%$ och underliggande aktiens värde $S_0 = 1140$. Notera att deltavärdena för köpoptioner går från noll till ett medan säljoptionernas deltavärden går från minus ett till noll (lodräta axlarna i grafen).

2.4 Hedging Error⁵

Som vi såg i föregående kapitel blir värdeförändringen i *hedge*-portföljen inte exakt lika med noll när priset på aktien förändrar sig. Det uppstår ett litet fel, ett så kallar *hedging error*,

$$\varepsilon = V_1 - V_0. \quad (2.4.1)$$

För alla värden, sådana att $0 < S < \infty$, $(T - t) > 0$, $\sigma > 0$ och $0 < K < \infty$, gäller att prisfunktionen, Black-Scholes formel (2.2.4), är konvex i S . Den direkta följderna blir att den som innehar *hedge*-portföljen (2.3.2) kommer att få ett litet överskott om priset på aktien stiger eller sjunker. D.v.s. (2.4.1) blir positiv. Om aktien stiger eller sjunker mycket kommer överskottet i portföljen att bli större.

Motsvarande gäller för en innehavare av *hedge*-portföljen (2.3.5), som kommer få ett underskott istället om aktien stiger eller sjunker, vilket alltså motsvarar att (2.4.1) blir negativ.

Slutsatsen blir alltså att vi med *delta hedging* inte kan nå riktigt ända fram till en portfölj som helt eliminerar värdeförändringar när den underliggande aktien stiger eller sjunker. Men vi kan komma hyfsat nära om aktiens värde inte svänger allt för mycket (allt annat lika). Och detta gäller nu trots antagandet att Black-Scholes modell helt beskriver verkligheten. Vi har, vid *delta hedging*, ett förväntat *hedging error* enligt modellen.

Frågan som ställs i den här uppsatsen är: Hur stor är skillnaden mellan förväntat *hedging error*, enligt Black-Scholes modell, och det verkliga *hedging error* som uppstår vid *delta hedging*?

Exempel 2.4.1: Om vi återigen tittar på **exempel 2.3.1.**, så skulle vi enligt Black-Scholes modell få ett *hedging error* motsvarande

$$\varepsilon = V_1 - V_0 = C_1 - \Delta S_1 - (C_0 - \Delta S_0). \quad (2.4.2)$$

⁵ Se Cerny (2004), kap. 12.

köptionen (det verkliga värdet) och det värde köptionen borde ha enligt Black-Scholes modell, efter att priset på underliggande aktien har förändrats. Vi får att

$$\delta = \hat{\varepsilon} - \varepsilon = \hat{V}_1 - V_0 - (V_1 - V_0) = \hat{V}_1 - V_1 = \hat{C}_1 - \Delta S_1 - (C_1 - \Delta S_1) = \hat{C}_1 - C_1. \quad (2.4.5)$$

Vad som testas i realiteten är om Black-Scholes modell underskattar eller överskattar förändringen i priset på köptionen, gentemot det verkliga utfallet, och detta ur ett *delta hedging*-perspektiv.

Alltså är det avvikelsen enligt figuren nedan vi testat storleken på.

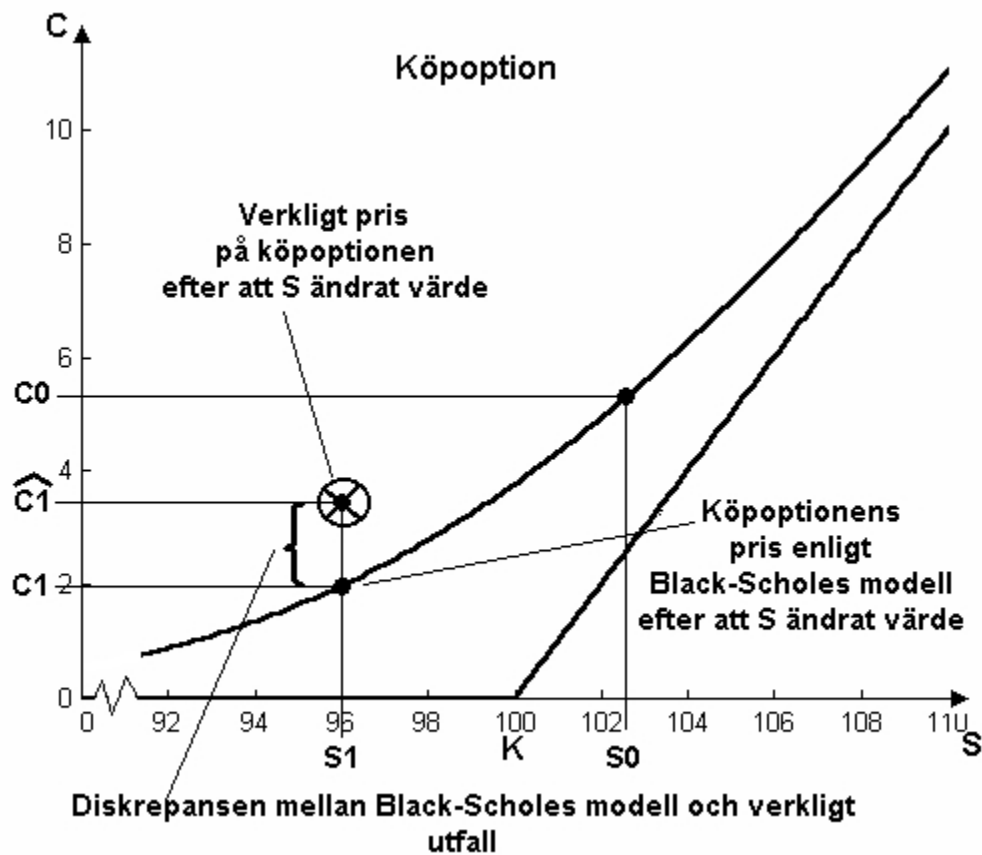


Fig. 2.4.2 : Diskrepansen som studeras i uppsatsen.

3 METOD

3.1 Data

Till studien som följer har jag haft att tillgå kursdata hämtats från OMX AB Stockholmsbörsen, gällande för perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22. Datamaterialet består av betalkurser, köp- respektive säljbudsnoteringar på OMXS30-optioner samt betalkurser för terminer skrivna på OMXS30-index. Som riskfri ränta har i studien konsekvent räntenoteringar från statsskuldväxeln SSV-01M används.

För att kalkyler över implicit volatilitet ska vara rimliga har betalkurser på optioner ersatts med medelvärdet av det högsta köpbudet och det lägsta säljbudet, då inga förändringar i betalkursen observerats under den senaste föregående minuten. Detta på grund av att tidigare betalkurser snabbt blir inaktuella relaterat till kursen på det underliggande indexet.

I studien används terminskurser för OMXS30-indexet och inte OMXS30-indexet i sig. Detta till följd av att OMXS30-indexet inte alltid korrigeras för utdelningar i de underliggande aktierna. Marknaden antas här alltså vara effektiv i meningen att några möjligheter till arbitrage inte förekommer mellan terminerna och korgen av aktier som utgör indexet.⁶

Observationerna är gjorda klockan 12:00 varje handelsdag. Materialet motsvarar alltså att omviktning av *hedge*-portföljen sker en gång per handelsdygn, och just klockan 12:00.

Observationerna av köpoptioner kommer vidare kallas \hat{C}_i och observationer av säljoptioner betecknas \hat{P}_i , där i är observationsordningen.

3.2 Beräkningsmetoder

Det som studien i uppsatsen avser att undersöka, är diskrepansen mellan *hedging error* enligt Black-Scholes modell och det verkliga utfallet. Som följer av kapitel 2.4 är observerade diskrepanser lika med skillnaden mellan det observerade priset på köpoptionen och det beräknade

⁶ Syrdal (2002), sid. 9.

värdet av köpoptionen - efter att priset på det underliggande indexet ändrat värde (pris). De observerade diskrepanserna blir således:

$$\delta_i = \hat{C}_{i+1} - C_{i+1} \quad (3.2.1)$$

Här är \hat{C}_{i+1} det observerade priset på köpoptionen vid tillfället $i + 1$.

Det beräknade priset, C_{i+1} , är det pris köpoptionen skulle haft vid tillfället $i + 1$ enligt Black-Scholes modell, förutsatt att indexet vid tillfället i varit lika med S_i . I Black-Scholes modell antas att riskfria räntan r och volatiliteten σ är konstanta, så beräkningen av C_{i+1} kan beskrivas

$$C_{i+1} = S_{i+1}N[d_1(S_{i+1}, K, r_i, \sigma_i, T - t_{i+1})] - \exp[-r_i(T - t_{i+1})]KN[d_2(S_{i+1}, K, r_i, \sigma_i, T - t_{i+1})], \quad (3.2.2)$$

där K är lösenpriset och $N[x]$, $d_1(S_{i+1}, K, r_i, \sigma_i, T - t_{i+1})$ och $d_2(S_{i+1}, K, r_i, \sigma_i, T - t_{i+1})$ är som i (2.2.4) och (2.2.5).⁷

Notera indexeringen på r och σ respektive S och t i (3.2.2). Här används samma värden på r och σ som observerats vid föregående tillfälle, d.v.s. tillfället i . Dessa storheter hålls alltså konstanta, enligt modellens antaganden, medan S_{i+1} är det observerade värdet på indexet vid tillfället $i + 1$.

Tiden t_{i+1} är tiden då observationerna S_{i+1} och \hat{C}_{i+1} är gjorda.

Volatiliteten σ_i är implicit volatilitet beräknat ur Black-Scholes formel gällande för de observerade värdena, \hat{C}_i , S_i , r_i , $T - t_i$ och lösenpriset K . Volatiliteten i beräkningarna är med andra ord marknadens prissättning av volatiliteten (eller bedömning av) vid tillfället i .⁸

Som numerisk metod för att beräkna värden på implicita volatiliteter har Newtons metod för lösning av ickelinjära funktioner använts, samt numerisk approximation av standard normal sannolikhetsfördelning.⁹

⁷ För antaganden och bevis av Black-Scholes formel, se Björk (1998) kap. 6.

⁸ Implicit volatilitet, se Björk (1998), kap. 6.7, eller appendix IV i Sundstedt och Österholm (2006).

⁹ Luenberger (1998), exercise 1 sid. 378 och Heath (1997).

Samma approximation av standard normal sannolikhetsfördelning har använts vid beräkningar med Black-Scholes formel av C_{i+1} ovan.

Genom beräkningen (3.2.2) skalas prisförändringen på köptionen som beror på förändringar i tiden bort från diskrepansen δ_i . Prisförändringen på köptionen som beror av att räntan och volatiliteten ändras från tillfälle i till tillfälle $i+1$, kommer däremot att ingå i diskrepansen δ_i .

Det här kan tyckas en aning underligt. Varför är förändringen i tiden bortskalad?

Mitt syfte med studien här är att se skillnaden mellan Black-Scholes modell och verkligheten i ett delta-*hedging*-perspektiv. I Black-Scholes modell finns förändringen i tiden med. Det gör, som sagts tidigare, inte förändringen i räntan och volatiliteten. Hur mycket tiden förändras från klockan tolv idag till klockan tolv i morgon är redan på förhand känt. Exakt vad kostnaden för den här förändringen i tiden kommer att bli går inte att bestämma exakt, eftersom den beror av förändringen i S , men att det uppstår en kostnad direkt relaterad till förändringen i tiden är känt. Däremot är det en annan sak med förändringen i räntan och volatiliteten, som förändrar sig slumpartat. Det går, med dynamisk *hedging*, att skydda sig mot förändringen i både volatiliteten och räntan, men en investerare som gör en *delta hedge* väljer att bara skydda sig mot den slumpvisa förändringen av priset på den underliggande aktien (eller indexet). Låt oss säga att delta-*hedge*-investeraren tror att Black-Scholes modell exakt beskriver verkligheten, då bör han eller hon också se att förändringen i tiden kommer att ge en del kostnader, men väljer medvetet att avstå från att skydda sig från dessa. Delta-*hedge*-investeraren som anammar Black-Scholes modell till fullo ser inte förändringarna i volatiliteten och räntan som en risk, för i modellen är de konstanter. Det är just exakt den diskrepansen jag med den här studien vill sätta fingret på. Därför skalas förändringen av priset på optionen som beror av att tiden går bort, men inte förändringen i volatiliteten och räntan. För den som gör en *delta hedge* och beräknar deltavärdet, Δ , enligt (2.3.6) finns dessa förändringar inte med i kalkylen, vare sig implicit eller explicit.

Observationerna av förändringen i OMXS30-indexet, som gäller för observationerna av \hat{C}_i, \hat{C}_{i+1} och för det beräknade värdet C_{i+1} , betecknas nedan x_i , som då är lika med:

$$x_i = S_{i+1} - S_i \quad (3.2.2)$$

Om nu Black-Scholes modell helt beskriver verkligheten ska det observerade optionspriset, \hat{C}_{i+1} , vara lika med C_{i+1} , eller om man så vill, differenserna $\hat{C}_{i+1} - C_{i+1}$ blir noll oberoende av hur stora differenserna $S_{i+1} - S_i$ är. Stämmer detta följer att förväntat fel vid *delta hedging* stämmer överens med Black-Scholes modell. Blir differenserna inte noll, stämmer heller inte det förväntade felet med modellen.

Vad som testas här är om det möjligen finns något förhållande mellan differenserna (3.2.1) och storleken på förändringarna på OMXS30-indexet. För detta görs enkel linjär regression enligt modellen:

$$\delta_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) + res_i, \quad (3.2.3)$$

där $\delta_i = \hat{C}_{i+1} - C_{i+1}$, $x_i = S_{i+1} - S_i$, \bar{x} är aritmetiskt medelvärde och res_i är slumpmässigt fel.

Parametrarna α och β skattas enligt minsta-kvadrat-metoden.¹⁰

Teststorheten, för om α är lika med eller skilt från värdet enligt nollhypotesen, är:

$$\theta_\alpha = \left| \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{d_\alpha} \right|$$

Nollhypotesen

$$H_0 : \alpha = 0$$

förkastas på signifikansnivån P om

$$\theta_\alpha > t_{p/2}(f),$$

där alternativhypotesen är

$$H_1 : \alpha \neq 0.$$

Teststorheten, för om β är mindre än värdet enligt nollhypotesen, är:

$$\theta_\beta = \frac{\beta - \hat{\beta}}{d}$$

Nollhypotesen

$$H_0 : \beta \geq 0$$

förkastas på signifikansnivån P om

¹⁰ För alla beräkningar i kapitlet rörande regression och hypotestest, se Blom och Holmquist (1998), kap. 23.

$$\theta_{\beta} > t_p(f),$$

där alternativhypotesen är

$$H_1: \beta < 0.$$

Ur det första av hypotestesten ovan ser vi om det är en rimlig bedömning att α ligger i närheten av noll eller avviker från noll, där snittet av förändringen på S ligger. Eller med andra ord: Skär regressionslinjen x -axeln vid \bar{x} ?

Frågan är kanske inte lika intressant som den fråga som ställs i andra hypotestestet. Är β negativ? Eller kanske något tydligare: Lutar regressionslinjen nedåt?

3.3 Kategorisering av observerade optioner

De observerade optionerna i studien är kategoriserade i tio grupper för köpoptioner och tio grupper för säljoptioner utifrån vilken deltavärde de har, enligt Black-Scholes modell (se tabellen nedan).

Gruppnamn	Intervall för köpoptioner	Intervall för säljoptioner
Grupp 0	$0 \leq \Delta < 0.1$	$-1 \leq \Delta < -0.9$
Grupp 1	$0.1 \leq \Delta < 0.2$	$-0.9 \leq \Delta < -0.8$
Grupp 2	$0.2 \leq \Delta < 0.3$	$-0.8 \leq \Delta < -0.7$
Grupp 3	$0.3 \leq \Delta < 0.4$	$-0.7 \leq \Delta < -0.6$
Grupp 4	$0.4 \leq \Delta < 0.5$	$-0.6 \leq \Delta < -0.5$
Grupp 5	$0.5 \leq \Delta < 0.6$	$-0.5 \leq \Delta < -0.4$
Grupp 6	$0.6 \leq \Delta < 0.7$	$-0.4 \leq \Delta < -0.3$
Grupp 7	$0.7 \leq \Delta < 0.8$	$-0.3 \leq \Delta < -0.2$
Grupp 8	$0.8 \leq \Delta < 0.9$	$-0.2 \leq \Delta < -0.1$
Grupp 9	$0.9 \leq \Delta \leq 1$	$-0.1 \leq \Delta \leq 0$

Tabell 3.3.1 Optionerna i studien är kategoriserade i grupper enligt tabellen ovan, där Δ är beräknat ur Black-Scholes modell enligt (2.3.1) och (2.3.6).

4 RESULTAT

I den här studien analyseras om förändringen i priset på OMXS30-optioner överensstämmer med Black-Scholes modell vid *delta hedging* under perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22. Studiens resultat motsvarar omviktning av *hedge*-portföljen en gång varje handelsdag klockan 12:00.

Studien är gjord med utgångspunkten att den som *delta hedgar* är innehavare av en OMXS30-köption (lång position) och vill skydda sig mot prisförändringar i optionen som beror av att OMXS30-indexet går upp och ner.

4.1 Presentation av resultat

4.1.1 Köpoptioner

Grupperingen av köpoptionerna är, enligt kapitel 3.3, sådan att Δ -värdet är lägst för grupp 0 och högst för grupp 9. Studiens resultat gällande för köpoptionerna visar på att lutningen på regressionslinjen är negativ för samtliga grupper. Lutningen är mer negativ för köpoptioner med lågt Δ -värde. Teststorheten θ_β , se (3.2.7), är hög för köpoptioner i grupperna med Δ lägre än 0.7. För köpoptioner med Δ -värden mellan 0.7 och 1 är lutningen på regressionslinjerna inte signifikant negativa, vid signifikansnivån 1%, inte heller på 5%-nivån.

Förklaringsgraden, R^2 , är låg för samtliga grupper av köpoptioner, men mycket låg för köpoptioner med högt Δ -värde.

Grupp	Köpoptionernas Δ -värde	Skattat $\hat{\alpha}$	θ_α -värde	Skattat $\hat{\beta}$	θ_β -värd e	Frihetsgrader	\bar{x}	R^2
0	0.0 - 0.1	-0.0134	0.3047	-0.0295	8.2060	83	-0.6800	0.4479
1	0.1 - 0.2	-0.0265	0.9739	-0.0267	9.6989	191	0.7200	0.3300
2	0.2 - 0.3	0.0300	0.7286	-0.0405	8.5632	143	0.8834	0.3390
3	0.3 - 0.4	0.1459	2.8699	-0.0402	7.4029	125	-0.7349	0.3048
4	0.4 - 0.5	0.0596	0.9562	-0.0347	6.0317	116	0.5550	0.2388
5	0.5 - 0.6	0.1048	1.9797	-0.0322	6.1935	126	-0.5537	0.2334
6	0.6 - 0.7	0.1917	3.2558	-0.0288	4.6163	148	-0.0474	0.1259
7	0.7 - 0.8	0.1026	2.2654	-0.0098	1.4984	179	0.6052	0.0124
8	0.8 - 0.9	0.0933	2.4135	-0.0112	1.8199	215	1.0821	0.0152
9	0.9 - 1.0	0.2184	6.1633	-0.0060	0.8526	246	0.1975	0.0029

Tabell 4.1.1: Studiens resultat gällande OMXS30-köpoptioner, grupperade enligt kap. 3.3.

I **fig. 4.1.1** nedan är förändringen i priset på köpoptioner i grupp 1 utritade i funktion av förändringen i OMXS30-indexet. Ringarna i figuren är priset på köpoptionen beräknat med konstant ränta och konstant volatilitet med Black-Scholes formel enligt uttrycket (3.2.2) i kapitel 3.2. Prickarna i **fig. 4.1.1** är priser på köpoptioner, observerade på marknaden.

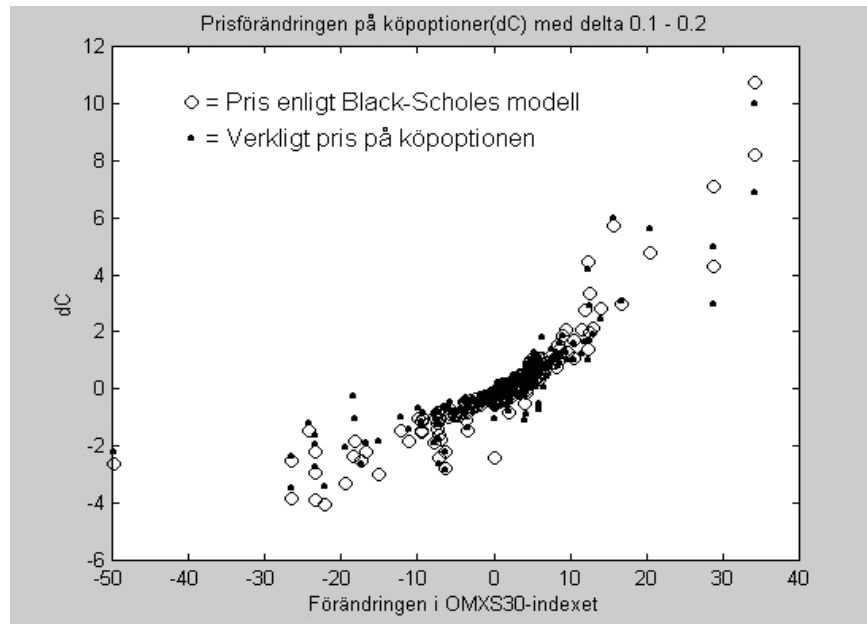


Fig. 4.1.1: Priser på köpoptioner med deltavärde mellan 0.1 och 0.2 i funktion av OMXS30-indexets förändring.

I **fig. 4.1.2** är diskrepansen för köpoptioner i grupp 1 (Δ mellan 0.1 och 0.2) utritad i funktion av förändringen i OMXS30-indexet, d.v.s. differensen mellan respektive prick och ring i figuren ovan.

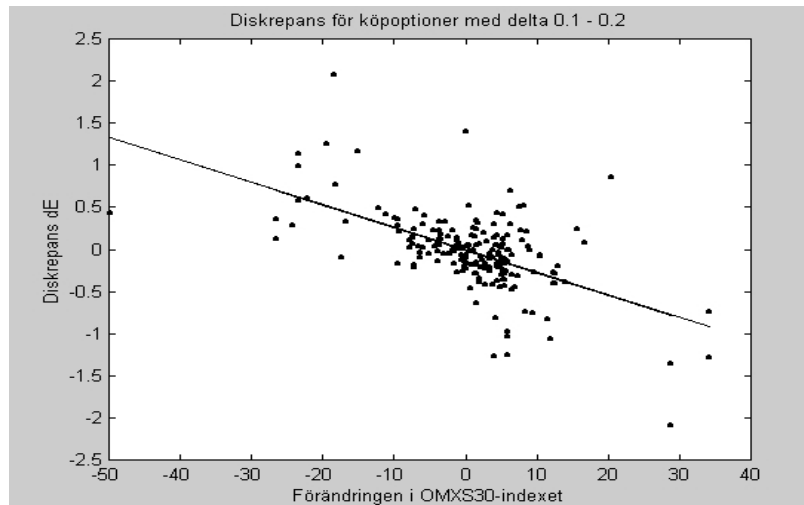


Fig. 4.1.2: Diskrepansen och regressionslinje enligt kap. 3.2 för köpoptioner med deltavärde mellan 0.1 och 0.2 i funktion av OMXS30-indexets förändring.

Skattningarna av $\hat{\alpha}$ -värdena är i tre fall signifikant avvikande från noll, för grupp 3, grupp 6 och grupp 9. Om $\hat{\alpha}$ avviker från noll eller inte saknar i stort betydelse om inte värdet för \bar{x} , i respektive grupp, också tas med i bedömningen. I grupp 6 och grupp 9 ligger \bar{x} relativt nära noll medan det i grupp 3 är mer negativt (se **fig. 4.1.3** och **tabell 4.1.1**).

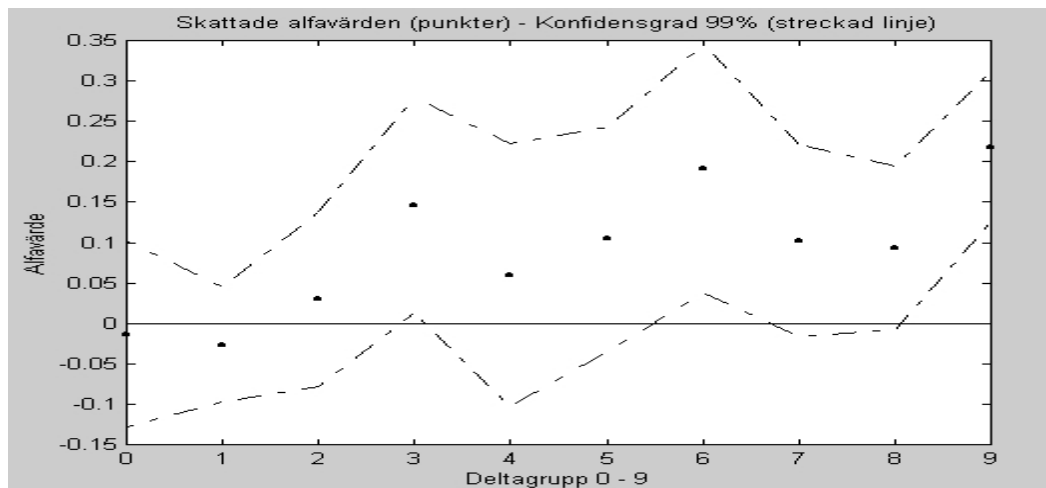


Fig. 4.1.3: Skattningarna av $\hat{\alpha}$ -värdena för OMXS30 köpoptioner med 99%-igt konfidensintervall.

Kanske mer intressant är skattningarna av $\hat{\beta}$ -värdena som på signifikansnivån 1% är signifikant negativa, i samtliga grupper av köpoptioner med Δ -värde under 0.7. Med andra ord: Om studiens resultat är korrekt tyder detta på att för köpoptioner ger Black-Scholes modell för höga Δ -värden, gentemot verkligheten.

I **fig. 4.1.4** är $\hat{\beta}$ -värdena för respektive grupp av köpoptioner utritad med ensidigt konfidensintervall med konfidensnivån 99%.

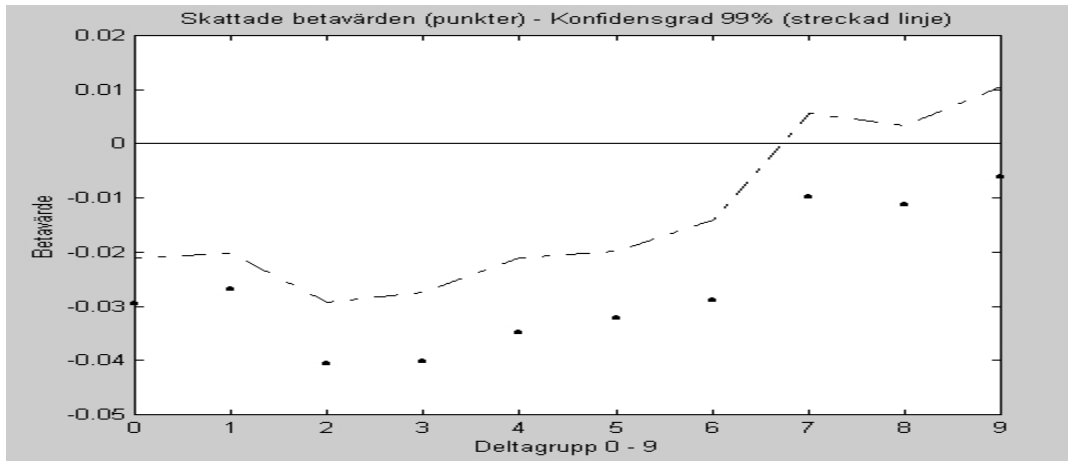


Fig. 4.1.4: Skattningarna av $\hat{\beta}$ -värdena för OMXS30 köpoptioner med 99%-igt konfidensintervall.

Samtliga histogram över residualerna, för de olika grupperna av köpoptioner, har högre kurtosis än normalfördelning och en aning skevhet (se **Tabell 4.1.2** och appendix I). Bara för köpoptioner i grupp 0 kan residualerna vid test för normalfördelning inte förkasta vid signifikansnivån 5%. För grupp 2 och grupp 3 kan normalfördelning för residualerna förkastas vid signifikansnivån 5%. Residualerna i övriga grupper av köpoptioner är signifikant avvikande från normalfördelning på signifikansnivån 0.1%.

Normalfördelningstest av residualer gällande för köpoptioner

Grupp	Skewness	Kurtosis	Signifikant avvikande från normalfördelning
0	-0.420969	3.765488	Nej
1	-0.672619	8.830183	sign***
2	0.028960	4.212391	sign*
3	-0.008563	4.282087	sign*
4	-0.857855	6.757230	sign***
5	-0.770200	6.657210	sign***
6	-0.958264	7.960510	sign***
7	-0.615623	3.918622	sign***
8	-0.508657	3.880962	sign***
9	-0.629489	5.045174	sign***

Tabell 4.1.2: Skewness och Kurtosis som residualerna från regressionen av diskrepansen gällande för respektive grupp av köpoptioner.

4.1.2 Säljoptioner

Grupperingen av säljoptionerna är, enligt kapitel 3.3, sådan att Δ -värdet är närmast minus ett för grupp 0 och går mot noll i grupp 9. Studiens resultat gällande för säljoptionerna visar på att lutningen på regressionslinjen är negativ för samtliga grupper. Lutningen är mer negativ för säljoptioner med Δ -värde kring -0.5 än i övriga grupper. Teststorheten θ_β , se (3.2.7), är hög för säljoptioner i samtliga grupper utom i grupp 1 och grupp 2, d.v.s. med Δ större än -0.9 och mindre än -0.7. För säljoptioner i dessa två grupper är lutningen på regressionslinjerna inte signifikant negativa, vid signifikansnivån 1%, men grupp 2 är signifikant negativ på 5%-nivån. Förklaringsgraden, R^2 , är lägre för säljoptionerna än för köpoptionerna.

Grupp	Säljoptionernas Δ -värde	Skattat $\hat{\alpha}$	θ_α -värde	Skattat $\hat{\beta}$	θ_β -värde	Frihetsgrader	\bar{x}	R^2
0	-1.0 – -0.9	0.0429	1.7661	-0.0199	6.0642	160	1.9083	0.1869
1	-0.9 – -0.8	0.0598	0.7262	-0.0051	0.4513	129	1.6711	0.0016
2	-0.8 – -0.7	0.0385	0.6049	-0.0171	1.8339	126	1.6135	0.0260
3	-0.7 – -0.6	-0.0297	0.3195	-0.0323	3.1042	122	0.1707	0.0732
4	-0.6 – -0.5	0.0821	1.0305	-0.0418	4.8608	113	1.2655	0.1729
5	-0.5 – -0.4	0.1386	2.3385	-0.0461	7.1307	125	-0.2243	0.2892
6	-0.4 – -0.3	0.1183	1.8792	-0.0253	4.0221	145	-0.1122	0.1004
7	-0.3 – -0.2	0.1812	4.4471	-0.0269	6.6835	203	0.2037	0.1804
8	-0.2 – -0.1	0.1261	3.9020	-0.0119	3.4482	302	0.0313	0.0379
9	-0.1 – 0.0	0.1405	5.7859	-0.0138	4.6648	259	0.2058	0.0775

Tabell 4.1.2: Studiens resultat gällande OMXS30-säljoptioner, grupperade enligt kap. 3.3.

I **fig. 4.1.5** nedan är förändringen i priset på säljoptioner i grupp 7 utritade som funktion av förändringen i OMXS30-indexet. Ringarna i figuren är priset på säljoptionen beräknat med konstant ränta och konstant volatilitet med Black-Scholes formel. Prickarna i **fig. 4.1.5** är priser på säljoptioner, observerade på marknaden.

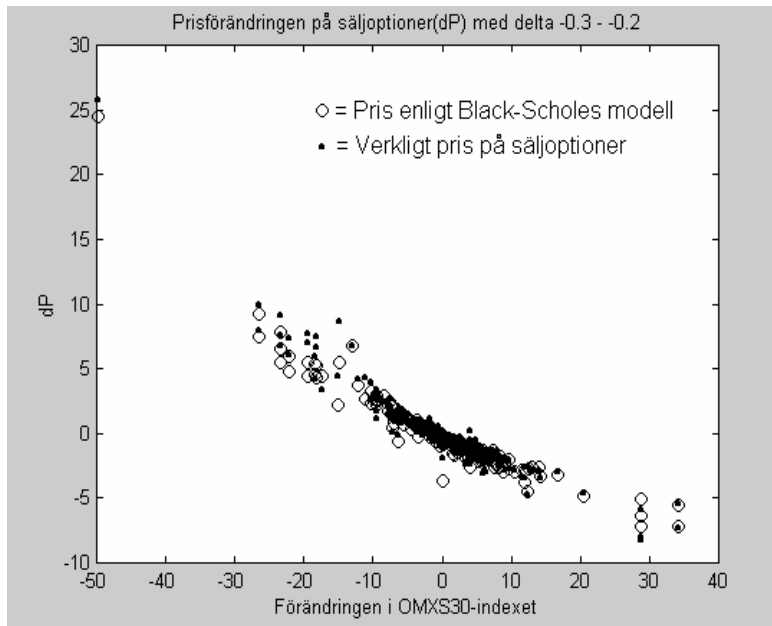


Fig. 4.1.5 Priser på sälloptioner med deltavärde mellan -0.3 och -0.2 i funktion av OMXS30-indexets förändring.

I **fig. 4.1.6** är diskrepansen för sälloptioner i grupp 7 (Δ mellan -0.3 och -0.2) utritad som funktion av förändringen i OMXS30-indexet, d.v.s. differensen mellan respektive prick och ring i figuren ovan.

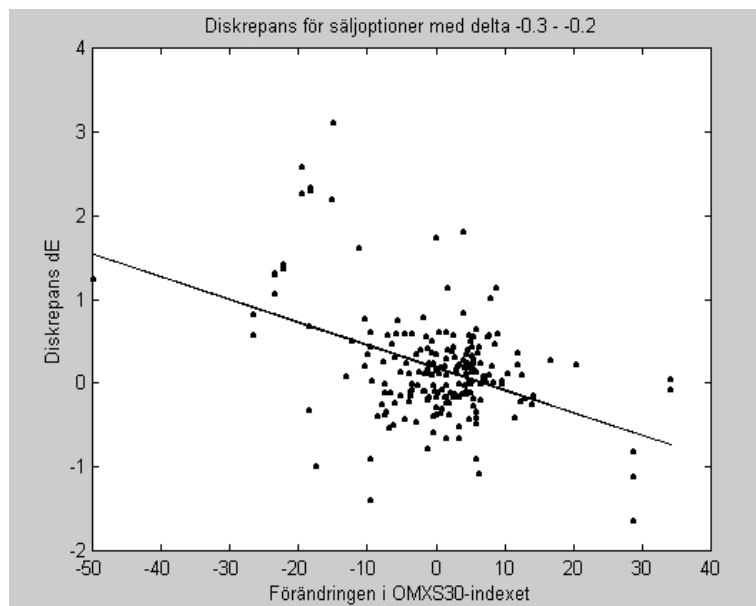


Fig. 4.1.6: Diskrepansen och regressionslinje enligt kap. 3.2 för sälloptioner med deltavärde mellan -0.3 och -0.2 som funktion av OMXS30-indexets förändring.

Skattningarna av $\hat{\alpha}$ -värdena är signifikant avvikande från noll i grupp 0 samt i grupperna 5-9 på signifikansnivån 1%. Som sagts för köpoptionerna i föregående kapitel, är $\hat{\alpha}$'s avvikelse från noll inte intressant om inte värdet för \bar{x} samtidigt belyses. I grupp 0-2 och i grupp 4 ligger \bar{x} relativt långt från noll medan det i övriga grupper ligger nära noll (se **fig. 4.1.7** och **tabell 4.1.2**).

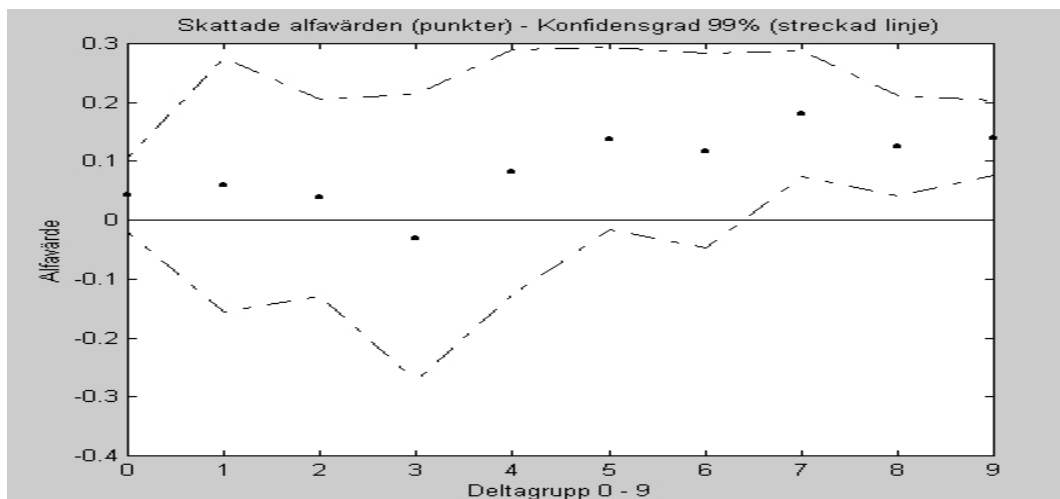


Fig. 4.1.7: Skattningarna av $\hat{\alpha}$ -värdena för OMS30 säljoptioner med 99%-igt konfidensintervall.

Skattningarna av $\hat{\beta}$ -värdena för säljoptioner visar ett något annorlunda mönster än för köpoptioner. $\hat{\beta}$ -värdena för säljoptioner i grupperna närmast kring Δ lika med -0.5 påvisar störst negativa värden. På signifikansnivån 1% är lutningen av regressionslinjerna signifikant negativa, i samtliga grupper utom i grupp 1 och grupp 2. Med andra ord: Om studiens resultat är korrekt tyder detta på att för säljoptioner ger Black-Scholes modell för höga Δ -värden, gentemot verkligheten.

I **fig. 4.1.8** är $\hat{\beta}$ -värdena för respektive grupp av köpoptioner utritad med ensidigt konfidensintervall med konfidensnivån 99%.

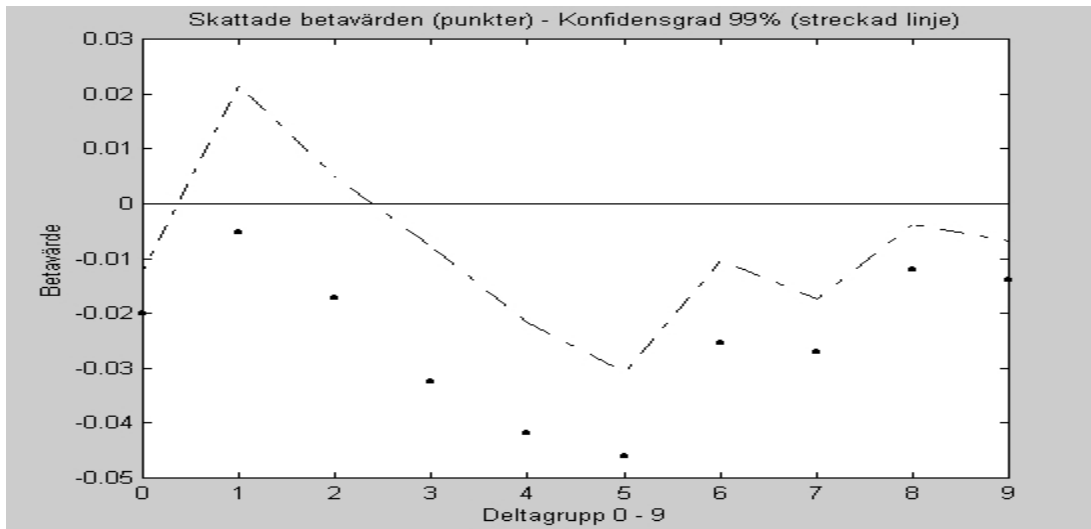


Fig. 4.1.8: Skattningarna av $\hat{\beta}$ -värdena för OMXS30 köpoptioner med 99%-igt konfidensintervall.

Liksom för köpoptioner, har histogrammen över residualerna, från regressionen av diskrepansen, gällande säljoptionerna, högre kurtosis än normalfördelning och är i varierande grad skeva (se **Tabell 4.2.2** och appendix I). Avvikelse från normalfördelning är här något större än för köpoptionerna. Samtliga grupper av säljoptioner uppvisar residualer som är signifikant avvikande från normalfördelning på signifikansnivån 0.1%.

Normalfördelningstest av residualer gällande för säljoptioner

Grupp	Skewness	Kurtosis	Signifikant avvikande från normalfördelning
0	-0.300138	6.492385	sign***
1	0.155943	6.304300	sign***
2	0.563913	6.525065	sign***
3	-0.585059	6.630180	sign***
4	0.150331	4.473984	sign**
5	0.327734	4.829310	sign***
6	-1.053296	8.320279	sign***
7	-0.333726	6.181069	sign***
8	-1.088373	9.598217	sign***
9	-1.205614	9.202554	sign***

Tabell 4.2.2: Skewness och Kurtosis som residualerna från regressionen av diskrepansen gällande för respektive grupp av säljoptioner.

4.2 Kritik

Resultaten ovan bör ses i perspektiv av hur liknande resultat kan uppnås med felaktiga observationsdata. Låt oss säga att Black-Scholes modell stämmer mycket gott mot verkligheten men samma studie görs med exempelvis, konsekvent för hög riskfri ränta. Då skulle liknande resultat kunna uppnås, d.v.s. en studie av den perfekta Black-Scholes-marknaden skulle trots att modellen stämmer med verkligheten ge diskrepanser med lutande regressionslinjer åt samma håll som i studien här i uppsatsen. Dock förefaller det något orimligt att en månaders-statskuldväxeln skulle vara en för hög räntenivå. Det motsatta vore mer naturligt, eftersom SSV-01M under perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22 var den växel på svenska räntemarknaden med de lägsta räntenoteringarna.¹¹

I studien används medelvärdena mellan köpbudet och säljbudet som betalkurs, om inte optionen handlats under den senaste minuten. Detta medelvärde är inte alltid helt adekvat som ersättning för betalkurser, men bör inte ge några systematiska fel i studien. Hade observationerna i studien gjorts på morgonen direkt efter börsens öppnande eller på kvällen direkt innan stängningen, skulle mycket väl resultaten kunna vara helt irrelevanta. Observationerna är dock gjorda klockan 12:00, mitt under handelsdagen, då pris-*spreaden* är relativt liten och prisbildningen relativt stabil.

Studien är gjord under en period då OMXS30-indexet steg kraftigt. Möjligt är att resultatet inte skulle bli det samma om studie gjorts under en period då OMXS30-indexet sjunkit eller uppgången varit mindre.

Residualerna från regressionerna kan inte tolkas som normalfördelade enligt normalfördelningstesten i **tabell 4.1.2**, **tabell 4.2.2** och appendix I. Samtliga residualer uppvisar i varierande grad kurtosis som överstiger 3 och skevhet som inte är noll. Konfidensintervallen för de skattade värdena $\hat{\alpha}$ och $\hat{\beta}$ är därför heller inte tillförlitliga.

¹¹ Se exempel i appendix II.

4.3 Slutsatser

I studien ovan testas i vilken utsträckning det förekommer diskrepans mellan Black-Scholes modell och verkliga förändringen i OMXS30-köptioner, ur ett *delta hedging*-perspektiv. Studien är gjord på kursdata från perioden mellan 2005-04-01 och 2006-06-22. Studien avser *delta hedging* där omviktning sker klockan 12:00 varje handelsdag i portföljen.

Studien är gjord med utgångspunkten att den som gör en *delta hedge* är innehavare av en OMXS30-köption (lång position) och vill skydda sig mot prisförändringar i optionen som beror av att OMXS30-indexet går upp och ner.

Både för köp- och säljoptioner tyder studien på att Black-Scholes modell ger för höga Δ -värden, gentemot verkligheten.

Resultaten bör ses ur perspektivet att liknande resultat kan uppstå om det i studien konsekvent används för hög riskfri ränta. Detta verkar dock inte rimligt då räntenoteringar för en månaders-statsskuldväxel används i studien. SSV-01M var det instrument på svenska *fixed-income*-marknaden som under testperioden hade de lägsta räntenoteringarna. Studien är också gjord under en period då OMXS30-indexet stigit relativt mycket. Möjligheten hade resultatet blivit annorlunda under andra förutsättningar.

4.4 Framtida forskning

En naturligt uppföljning på denna studie vore att göra studien över en längre period, då OMXS30-indexet under längre tid både går upp och ner.

Vidare föreslås här att resultaten i denna uppsats studeras utifrån vetenskapen att histogram av förändringar i OMXS30-indexet inte exakt överensstämmer med logaritmisk normalfördelning. Histogrammen har högre kurtosis, fetare svansar och är vanligen något skeva. Leder detta till att regressionslinjerna för köp- och säljoptionerna i studien ovan blir negativa?

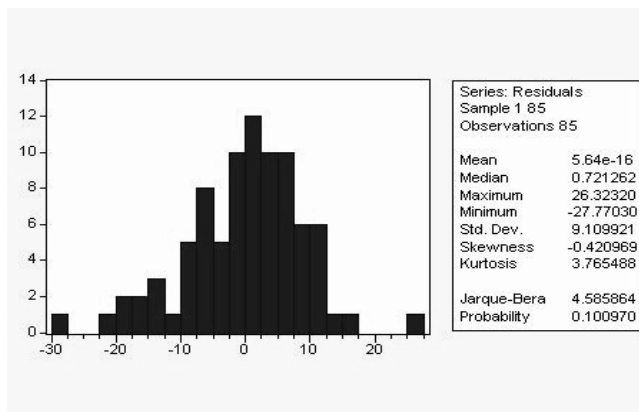
REFERENSER

- Björk, T., 1998, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford.
- Black, F., Scholes, M., 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities.", *Journal of Political Economy*, 81, 637-59.
- Blom, G., Holmquist, B., 1998, *Statistikteori med tillämpningar*, Studentlitteratur, Lund, 3:e uppl.
- Cerny, Ales, 2004, *Mathematical Techniques in Finance - Tools for Incomplete Markets*, Princeton University Press, Princeton.
- Heath, M. T., 1997, *Scientific Computing*, McGraw-Hill, New York.
- Luenberger, D. G., 1998, *Investment Science*, Oxford University Press, Oxford.
- MacBeth, J. Merville, L. "An empirical examination of the Black-Scholes call option pricing model", *Journal of finance*, No.34, 1979. pp 1173-1186.
- Rubinstein, M., 1994, "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 771-818.
- Sundstedt, F. och Österholm, G. 2006, "Riskpreferenser på aktiemarknaden skattat ur priser på OMXS30-optioner", Examensarbete C, Uppsala Universitet.
- Syrdal, S. A., 2002, "A Study of Implied Risk-Neutral Density Functions in the Norwegian Option Market", *Working Paper Norges Bank*, vol 13.

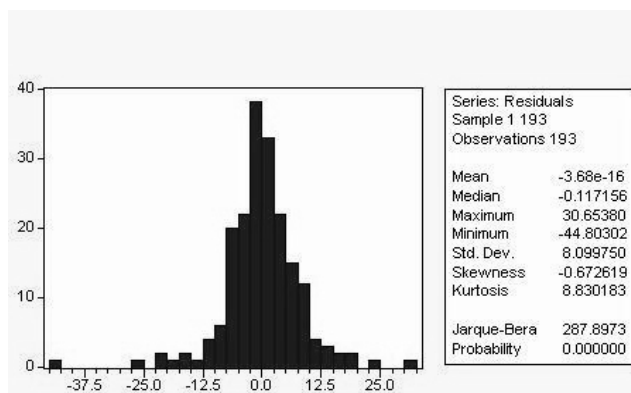
APPENDIX I

I figurerna nedan visas histogram och normalfördelningstest gällande residualer från regressionen av diskrepansen hos optioner, i respektive Δ -grupp.

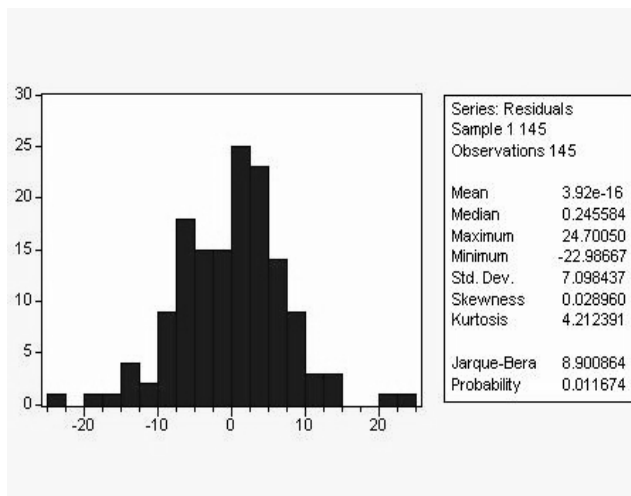
Köoptioner grupp 0



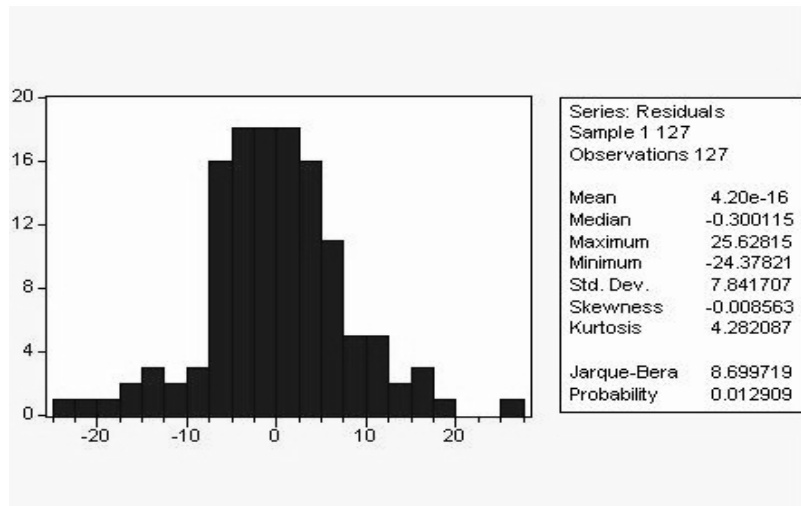
Köoptioner grupp 1



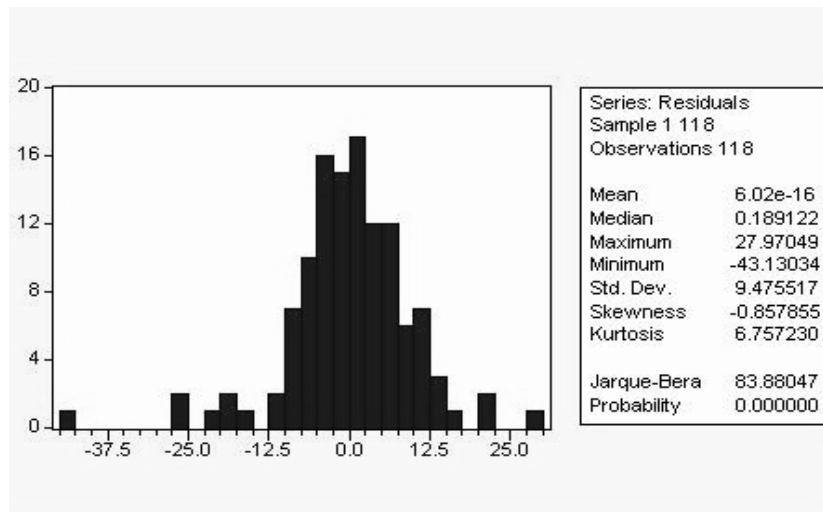
Köoptioner grupp 2



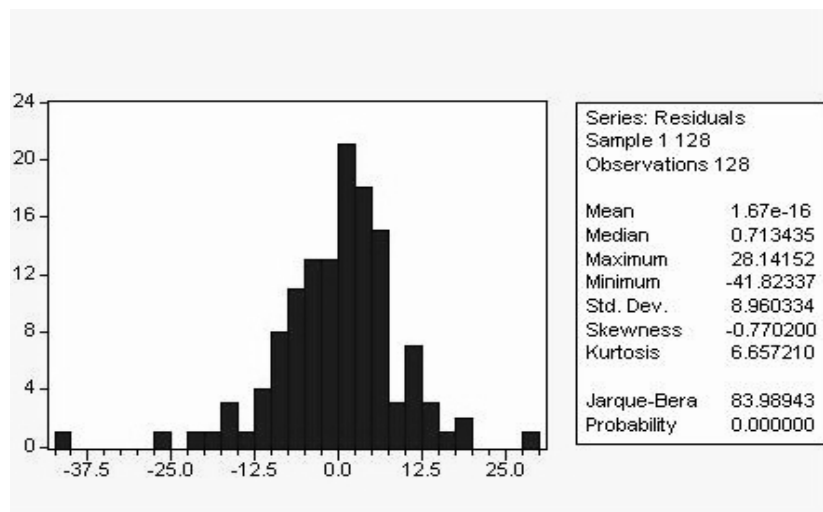
Köptioner grupp 3



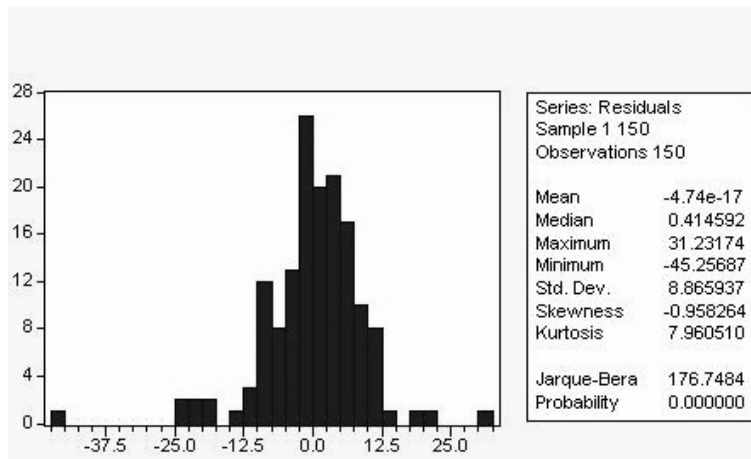
Köptioner grupp 4



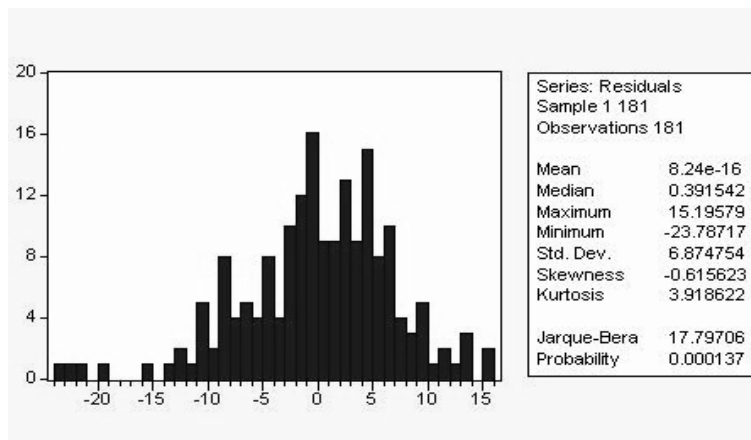
Köptioner grupp 5



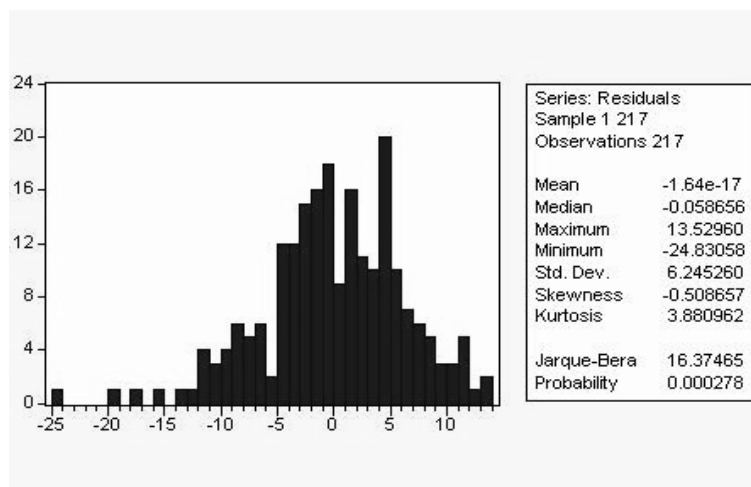
Köptioner grupp 6



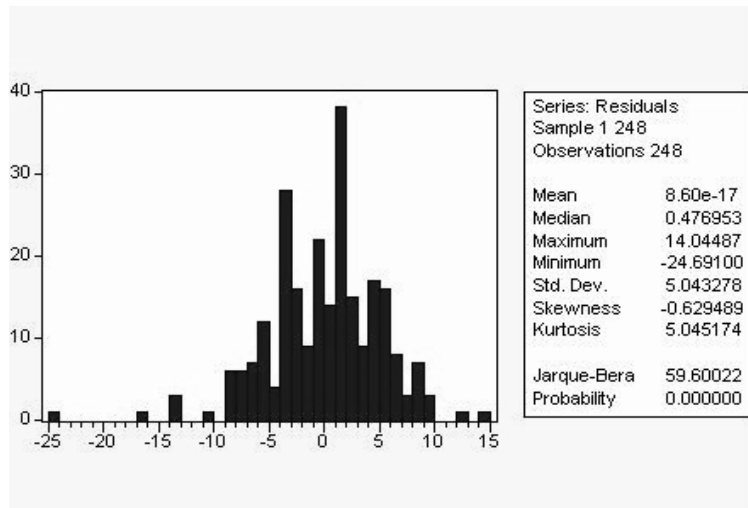
Köptioner grupp 7



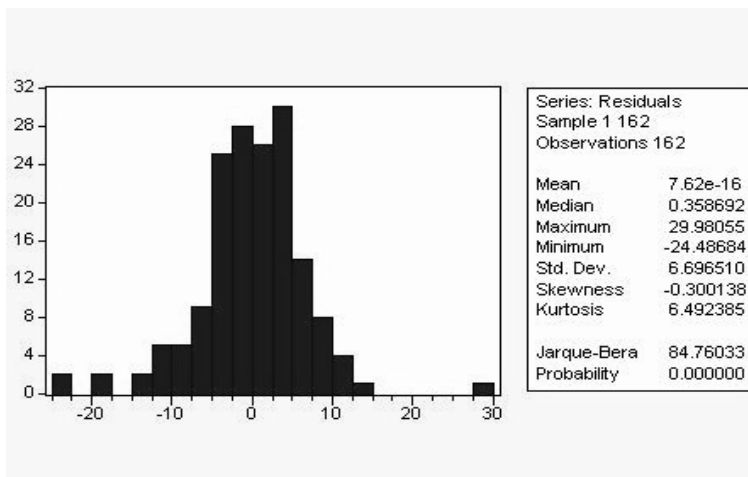
Köptioner grupp 8



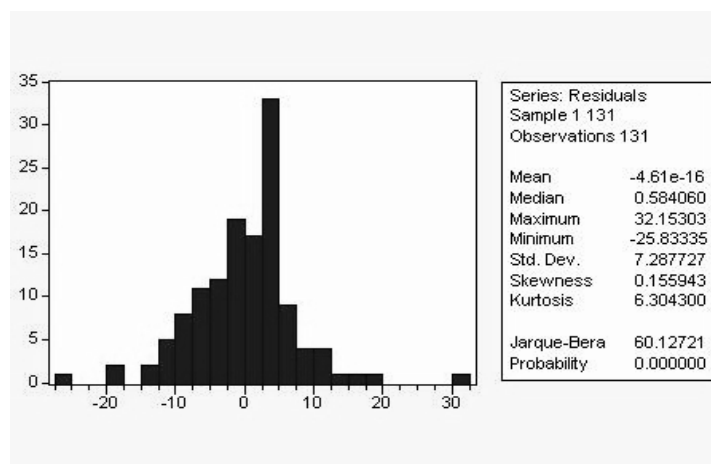
Köptioner grupp 9



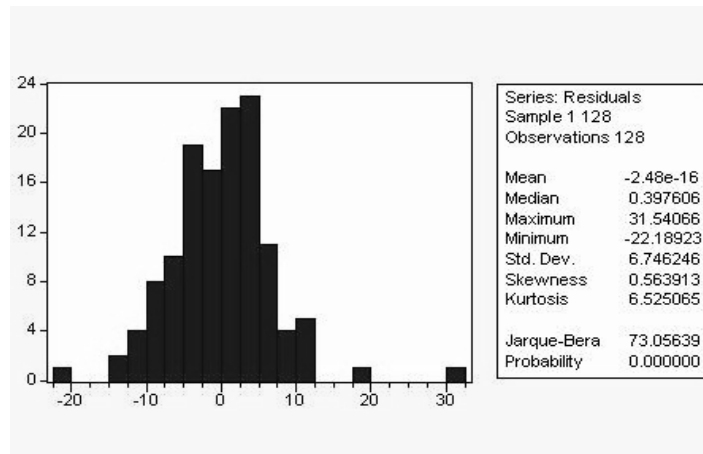
Säljoptioner grupp 0



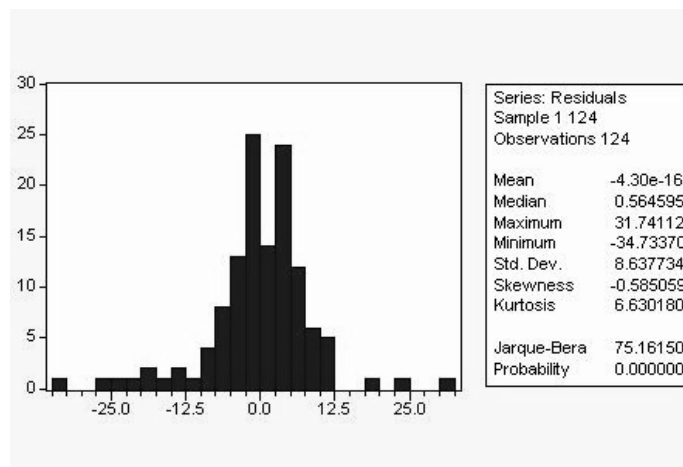
Säljoptioner grupp 1



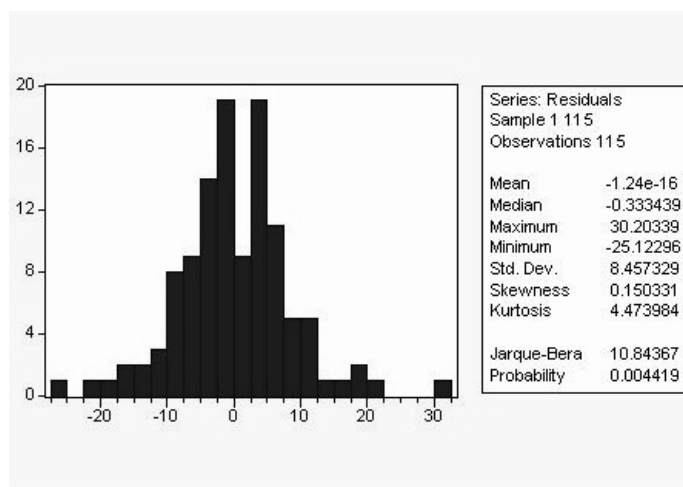
Säljoptioner grupp 2



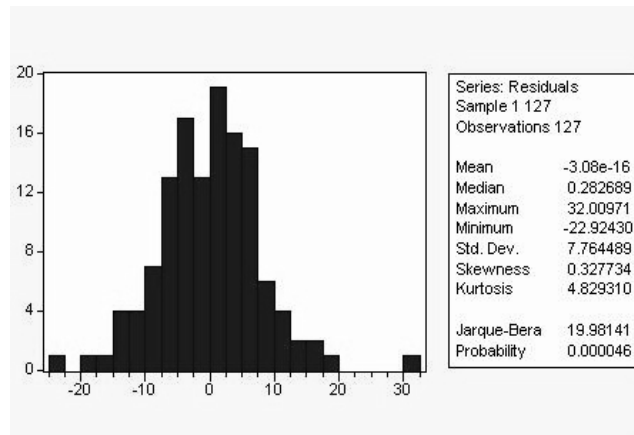
Säljoptioner grupp 3



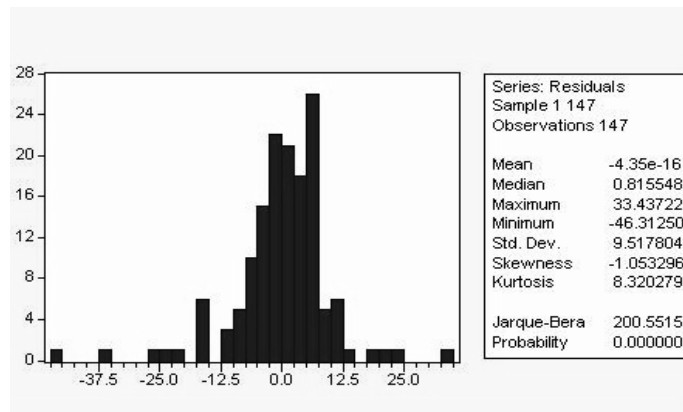
Säljoptioner grupp 4



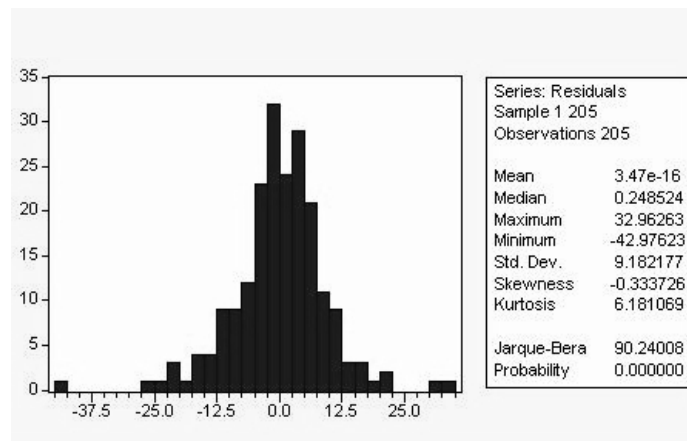
Säljoptioner grupp 5



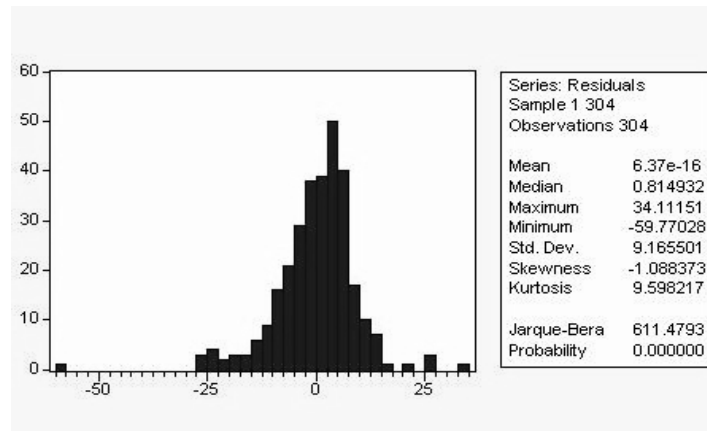
Säljoptioner grupp 6



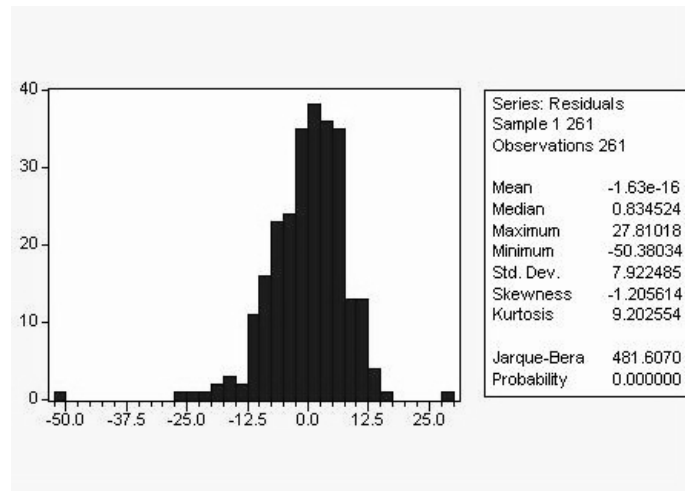
Säljoptioner grupp 7



Säljoptioner grupp 8



Säljoptioner grupp 9



APPENDIX II

Om Black-Scholes modell helt stämmer med verkligheten och en för hög ränta används vid beräkningarna, i en studie som i uppsatsen, så ger det diskrepanser som i viss mån överensstämmer med resultaten i kapitel 4.1.

Exempel:

Låt oss säga att Black-Scholes modell helt perfekt beskriver verkligheten i en värld där riskfria räntan är lika med $r = 3.15\%$ och volatiliteten är $\sigma = 17\%$, men vi av någon anledning använder för hög ränta i beräkningarna. Säg till exempel att den felaktiga riskfria räntan är $r_{FEL} = 20\%$. Vi

observerar nu det underliggande indexets värde till $S_0 = 1144$. Det är 16 dagar kvar till lösen av en köption, vars pris är $C_0 = 4.69$. Vi observerar också en säljoption som handlas för $P_0 = 6.42$, också den har 16 dagar kvar till lösendagen. Köptionens deltavärde är $\Delta_C = 0.2077$ och deltavärdet på säljoptionen är $\Delta_P = -0.2573$.

Skattar vi nu implicita volatiliteten för köptionen får vi den till 14.69% - alltså en för låg volatilitet jämfört med den verkliga, som är 17%.

Skattningen av implicita volatiliteten för säljoptionen ger 19.52% - vilket alltså är högre än den verkliga.

Gör vi nu samma beräkningar som beskrivits i uppsatsen får vi resultaten enligt **fig. A.1** och **fig. A.2** för köptionen och som i **fig. A.3** och **fig. A.4** för säljoptionen.

Vårt resultat antyder att köptionen ökar mindre i "verkligheten" (svarta prickar) än mot "modellen" (ringar), när det underliggande indexet stiger. När indexet sjunker tyder resultaten på att köptionen sjunker mindre i "verkligheten" än enligt "modellen" (se **fig. A.1**).

Beräknar vi diskrepansen mellan "verkligheten" och "modellen" får vi resultatet utritat i **fig. A.2**.

På liknande sätt ser vi i **fig. A.3** och **fig. A.4** att säljoptionen stiger mer i "verkligheten" än i "modellen", när indexet sjunker och vice versa när indexet stiger. Även här får vi att diskrepansen lutar negativt där förändringen av indexet ligger kring noll.

På grund av att vi använder 20% som riskfri ränta i det här exemplet istället för 3.15% tolkar vi här felaktigt att modellen inte beskriver verkligheten. Här i exemplet beskriver Black-Scholes modell vår verklighet, men med lägre riskfri ränta än vi observerat.

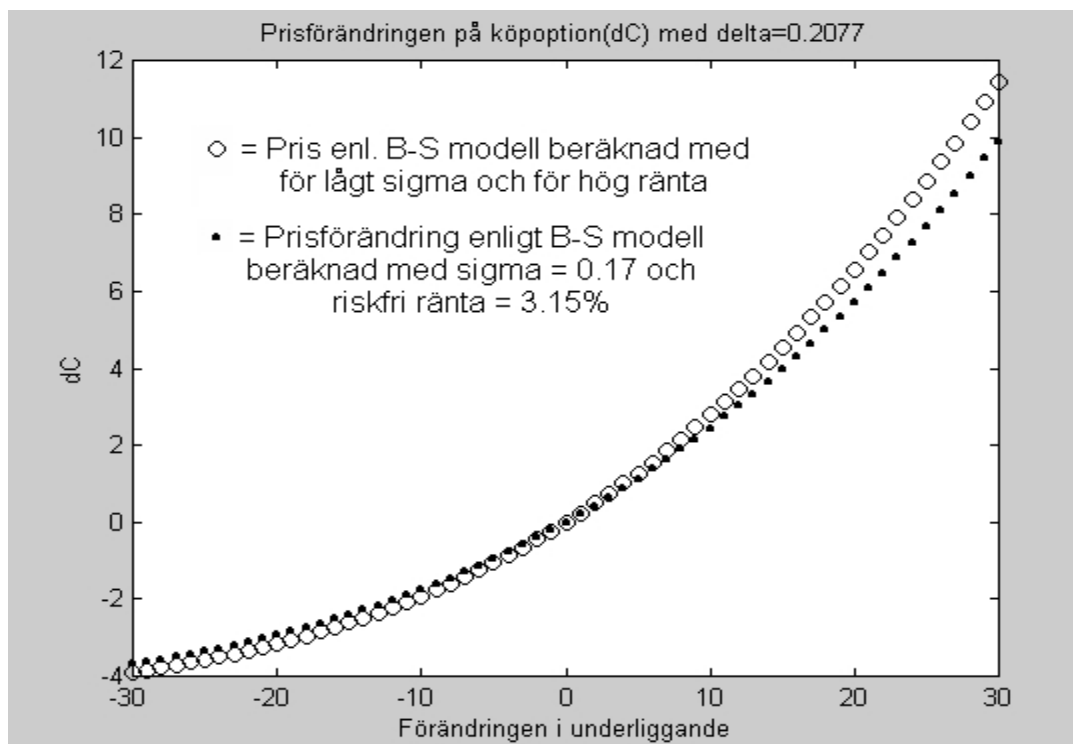


Fig. A.1: Förändringen i priset på köpoptionen, enligt exemplet ovan, i funktion av förändringen i det underliggande indexet – allt annat lika.

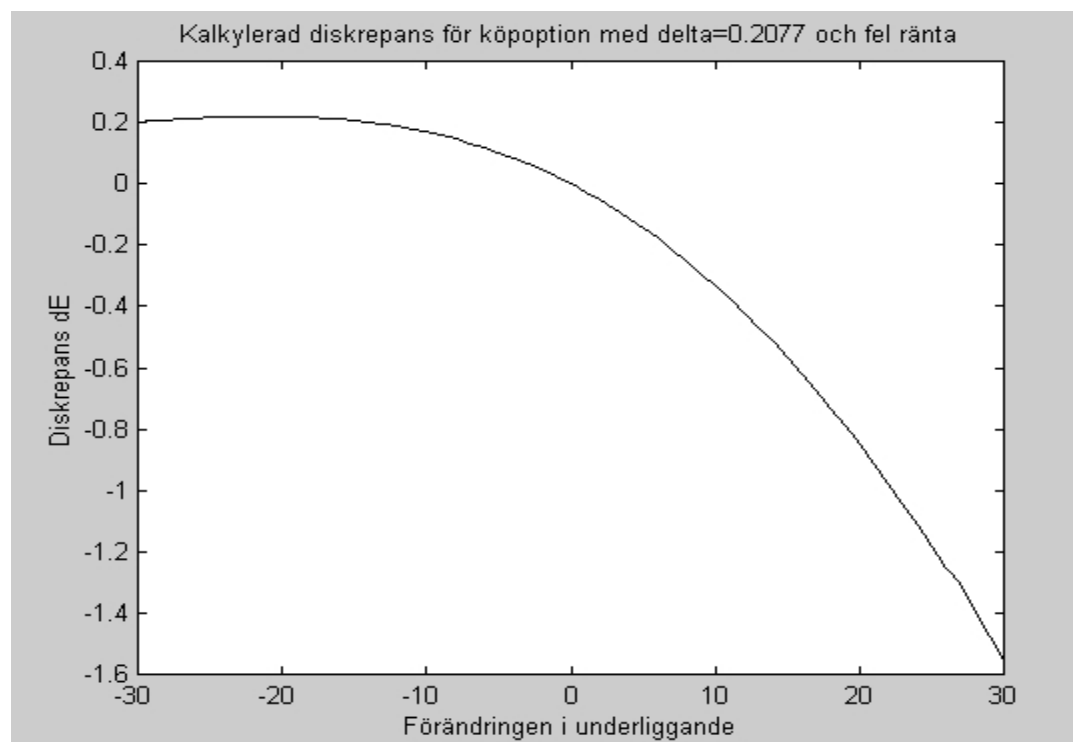


Fig. A.2: Diskrepansen vi får bara genom att använda 20% som riskfri ränta istället för den korrekta riskfria räntan 3.15%

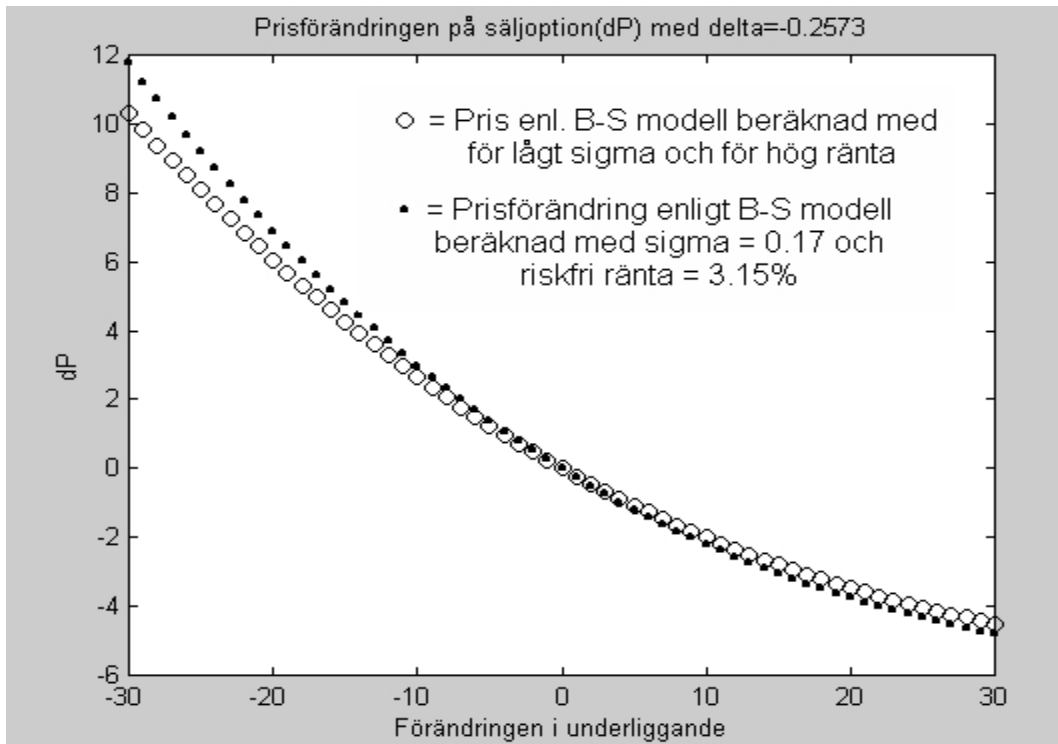


Fig. A.3: Förändringen i priset på sälloptionen, enligt exemplet ovan, i funktion av förändringen i det underliggande indexet – allt annat lika.

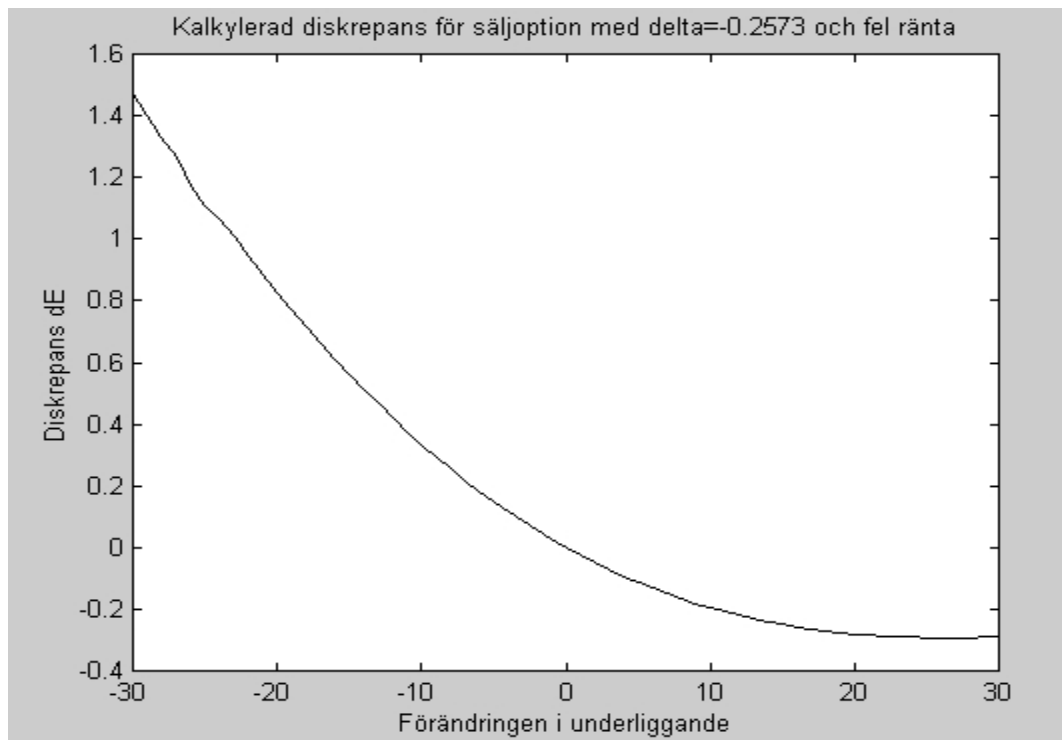


Fig. A.4: Diskrepansen vi får när vi använder 20% som riskfri ränta istället för den korrekta riskfria räntan 3.15%.